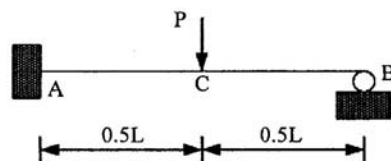


100 年專門職業及技術人員高等考試結構分析參考解答

一、一支靜不定鋼梁如圖所示，左邊 A 點為固定端，右邊 B 點為滾支承，跨中 C 點承受集中載重 $P = 5 \text{ kN}$ ，跨度 $L = 6 \text{ m}$ ，若此集中載重 P 所產生的梁中最大彎矩，正好造成此梁產生兩個塑性鉸，且形成破壞機構，假設此材料為理想彈塑性，試算此梁斷面的塑性彎矩 M_p （單位：kN-m）。（20 分）



【解題老師】林冠丞老師

• 100 年土木技師試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 材料性質：理想彈塑性
- 幾何性質： $L = 6 \text{ m}$
- 外力： $P = 5 \text{ kN} \downarrow$

(2) 待求

- 塑性彎矩： M_p

(3) 方法

- 虛功原理

(4) 思路

- (外力) $\rightarrow$ (內力)

note

若虛功原理不熟，也可以直接使用力平衡，一樣簡單。

參考解答

(1) (外力) $\rightarrow$ (內力)

- 依據虛功原理（圖 a 及 b）
(真外力) $\cdot$ (虛變位) = (真內力) $\cdot$ (虛變形)

$$(P) \left(\frac{L\theta}{2} \right) = (M_p)(\theta + 2\theta)$$

$$\Rightarrow M_p = \frac{PL}{6} = \frac{(5)(6)}{6} = 5 \text{ kN-m}$$

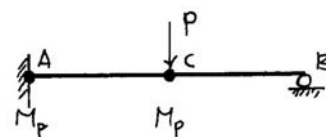


圖 a：真實受力系統

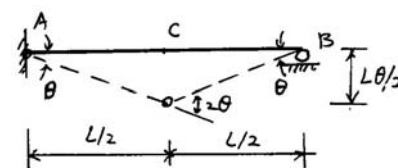
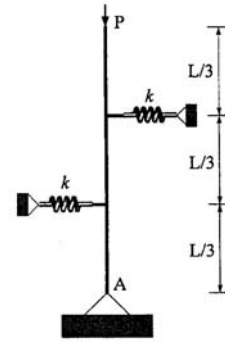


圖 b：虛構變位系統

Ans：塑性彎矩 $M_p = 5 \text{ kN-m}$

※本題請參考“實力材料力學精修班教材 P10-15”

二、一支二維剛性柱如圖所示，柱頂為自由端承受向下垂直作用力 P ，柱底 A 點為鉸支承，柱高 $L = 9\text{ m}$ ，柱高 3 m 及 6 m 處各有一支可水平位移的彈簧，彈簧係數 $k = 10\text{ kN/m}$ ，計算此柱的臨界挫屈載重 P_{cr} （單位：kN）。（20 分）



【解題老師】林冠丞老師

• 100 年土木技師試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 幾何性質： $L = 9\text{ m}$
- 彈簧係數： $k = 10\text{ kN/m}$

(2) 待求

- 臨界荷重： P_{cr}

(3) 方法

- 擾態平衡法

(4) 思路

- （彈簧力）→（外力）

參考解答

(1) （彈簧力）→（外力）

- 依據力的平衡

$$\text{圖 a} [\sum M_A = 0]: P(L\theta) = k\left(\frac{L\theta}{3}\right)\left(\frac{L}{3}\right) + k\left(\frac{2L\theta}{3}\right)\left(\frac{2L}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \left(P - \frac{5kL}{9}\right)(L\theta) = 0$$

$$\therefore P_{cr} = \frac{5kL}{9} = \frac{5(10)(9)}{9} = 50\text{ kN}$$

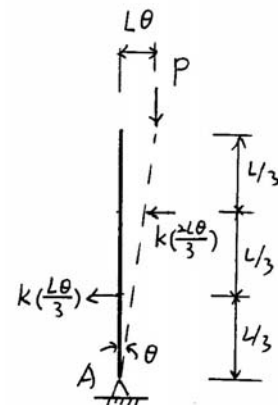
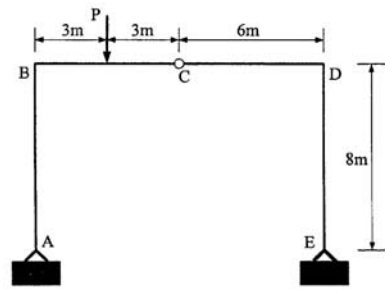


圖 a：中性平衡狀態

Ans：臨界挫屈載重 $P_{cr} = 50\text{ kN}$

※本題請參考“實力材料力學題型班教材 P9-1〔例 9-1〕”

三、一個二維鋼構架如圖所示，梁 BD 中央 C 點為樞接，鋼材彈性模數 $E_{st} = 200 \text{ GPa}$ ($1 \text{ GPa} = 1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$)，柱高 8 m，垂直向下集中載重 $P = 24 \text{ kN}$ 作用於梁上，A、E 點均為鉸支承，假設柱均不考慮挫屈問題，(一)將各構件的彎矩分佈圖繪於試卷上，要標示正、負彎矩與其數值，以及梁中彎矩為零及最大彎矩的位置。(15 分)(二)若 AB 柱的斷面為正方形且尺寸為 $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ ，AB 柱的最大軸向壓應力加上最大彎曲壓應力 σ_{AB} 為何？(壓應力用“-”，單位用 kN/cm^2 表示) 本小題小數點後取 2 位，第 3 位小數四捨五入到第 2 位小數。(15 分)



【解題老師】林冠丞老師

• 100 年土木技師試題 •

問題剖析

(1)已知

- 材料性質： $E = 200 \text{ GPa}$
- 幾何性質：AB 柱 $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$
- 外力： $P = 24 \text{ kN} \downarrow$

(2)待求

- 內力圖： $M \text{ dia.}$
- 應力： σ_{AB}

(3)思路

- (外力) $\rightarrow$ (內力) $\rightarrow$ (內力圖)
- (應力)

參考解答

(1) (外力) $\rightarrow$ (內力)

- 依據力的平衡
本題為穩定且靜定的三鉸式剛架，直接由力平衡即可解決所有反、內力。

$$\begin{aligned} \text{圖 a } [\sum M_A = 0]: 24(3) - E_y(12) &= 0 \\ \Rightarrow E_y &= 6 \text{ kN } (\uparrow) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{圖 a } [\sum F_y = 0]: A_y - 24 + 6 &= 0 \\ \Rightarrow A_y &= 18 \text{ kN } (\uparrow) \end{aligned}$$

考慮 CDE 為二力物體，可得

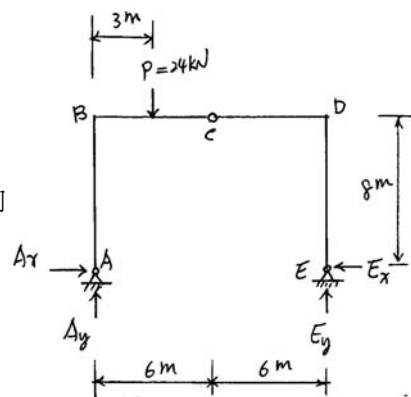


圖 a

$$E_x = \frac{3}{4}E_y = \frac{3}{4}(6) = \frac{9}{2} \text{ kN (} \leftarrow \text{)}$$

$$\text{圖 a } [\Sigma F_x = 0]: A_x - \frac{9}{2} = 0$$

$$\Rightarrow A_x = \frac{9}{2} \text{ kN (} \rightarrow \text{)}$$

進一步取圖 b 各桿為分離體圖，以求端點內力。

(2) (內力) $\rightarrow$ (內力圖)

• 依據組合法

繪製彎矩圖 (圖 c)。

(3) (內力) $\rightarrow$ (應力)

• 依據軸向應力及彎曲應力公式

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A} + \frac{M_B}{S} = \frac{(-18)}{(10 \times 10)} + \frac{(-36 \times 10^2)}{(10)(10)^2/6}$$

$$= -21.78 \text{ kN/cm}^2$$

Ans : (a) 彎矩圖如圖 c 所示

(b) AB 柱最大壓應力 $\sigma_{AB} = -21.78 \text{ kN/cm}^2$

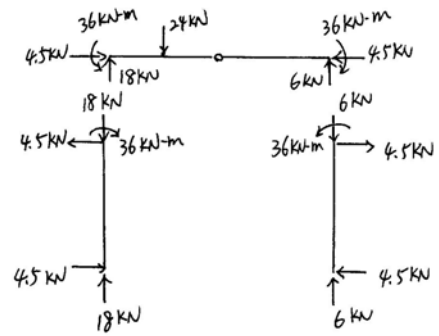


圖 b

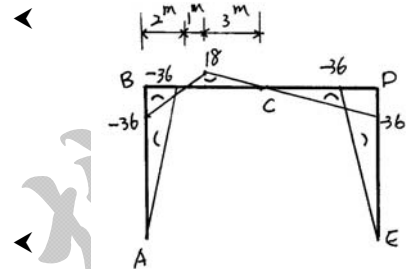
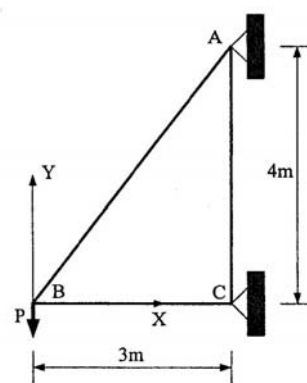


圖 c : 彎矩圖(單位 kN-m)

(+ 外側受壓, - 內側受壓)

※本題請參考“實力結構學精修班教材 P3-26 [例 3-13]”

四、如圖所示二維三桿桁架，A、C 兩點為鉸支承，在 B 點承受垂直力 $P = 200 \text{ kN}$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ (一)試求 AB、AC 及 BC 三桿之內力 (拉力用“+”；壓力用“-”，單位用 kN 表示)。(15 分)(二)若 BC 桿的斷面積為 100 cm^2 ，彈性模數為 200 GPa ，寫出 BC 桿在全域座標 X-Y 的勁度矩陣(單位須以 kN/m 表示)。本小題小數點後取 2 位，第 3 位小數四捨五入到第 2 位小數。(15 分)



【解題老師】林冠丞老師

• 100 年土木技師試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 材料性質： $E = 200 \text{ GPa}$
- 幾何性質： $A = 100 \text{ cm}^2$
- 外力： $P = 200 \text{ kN} \downarrow$

(2)待求

- 內力： N_{AB} 、 N_{AC} 、 N_{BC}
- 勁度矩陣： $[K^{BC}]$

(3)思路

- (外力) → (外力)
- (結構型式) → (勁度矩陣)

參考解答

(1) (外力) → (內力)

- 依據力的平衡

考慮 AC 為恒零桿，本題可視為穩定且靜定的桁架。

$$\text{圖 a} [\Sigma F_y = 0]: \frac{4}{5} N_{AB} - 200 = 0$$

$$\Rightarrow N_{AB} = 250 \text{ kN (拉力)}$$

$$\text{圖 a} [\Sigma F_x = 0]: \frac{3}{5} (250) + N_{BC} = 0$$

$$\Rightarrow N_{BC} = -150 \text{ kN (壓力)}$$

(2) (結構型式) → (勁度矩陣)

- 依據勁度係數的定義

設定共同 (全域) 座標 (圖 a)

- ① 令 $r_1 = 1$ (圖 b)，可得

$$K_{11} = \frac{EA}{L} = -K_{31}$$

$$K_{21} = K_{41} = 0$$

- ② 令 $r_2 = 1$ (圖 c)，可得

$$K_{12} = K_{22} = K_{32} = K_{42} = 0$$

- ③ 令 $r_3 = 1$ (圖 d)，可得

$$K_{33} = \frac{EA}{L} = -K_{13}$$

$$K_{23} = K_{43} = 0$$

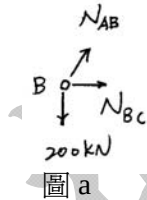


圖 a

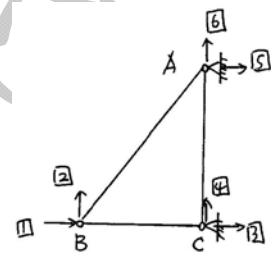
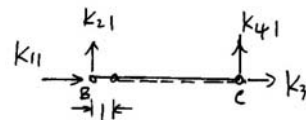
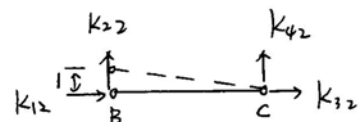
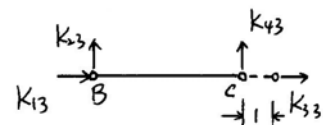


圖 a：設定共同 (全域) 座標

圖 b： $r_1 = 1$ 圖 c： $r_2 = 1$ 圖 d： $r_3 = 1$

④令 $r_4 = 1$ (圖 e), 可得

$$K_{14} = K_{24} = K_{34} = K_{44} = 0$$

$$\therefore [K^{BC}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 666,666.67 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kN/m} \cdots (a) \blacktriangleleft$$

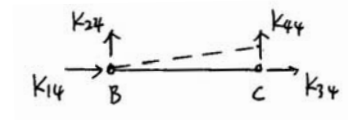


圖 e : $r_4 = 1$

note

$$\begin{aligned} \frac{EA}{L} &= \frac{(200)(100 \times 10^2)}{(3)} \\ &= 666,666.67 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

Ans : (a) 三桿內力

$$N_{AB} = +250 \text{ kN}, N_{AC} = 0, N_{BC} = -150 \text{ kN}$$

(b) BC 桿在全域座標的勁度矩陣如(a)所示

※本題請參考“實力結構學題型班教材 P6-30 [例 6-18]”