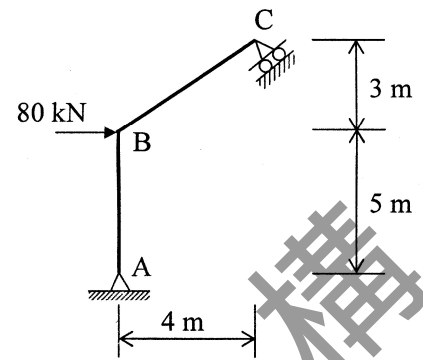


# 101 年公務人員高等考試試題結構學參考解答

本科由實力專任教師**林冠丞老師**即時解答

- 一、如右圖所示剛構架，各桿件皆為均勻矩形斷面，其斷面積 ( $A$ ) 為  $50 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ 、二次面積力矩 ( $I$ ) 為  $235 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ，各桿件所用材料之彈性模數 ( $E$ ) 為  $200 \text{ GPa}$  ( $200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ )、剪力模數 ( $G$ ) 為  $80 \text{ GPa}$  ( $80 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ )，桿件受軸力 ( $N$ )、剪力 ( $V$ ) 及彎矩 ( $M$ ) 共同作用引起之應變能 ( $U$ ) 為  $U = \int \frac{N^2 dx}{2EA} + \int \frac{kV^2 dx}{2GA} + \int \frac{M^2 dx}{2EI}$ ，式中  $k = 1.2$ 。
- 求剛構架之軸力圖、剪力圖及彎矩圖。(10 分)
  - 考慮軸力 ( $N$ )、剪力 ( $V$ ) 及彎矩 ( $M$ ) 作用引起之 B 點水平位移量 ( $\Delta_{B,h}$ )。(10 分)
  - 若只考慮彎矩 ( $M$ ) 作用所引之 B 點水平位移量 ( $\Delta_{B,h}$ )，其誤差百分比為何？(5 分)



【解題老師】林冠丞老師

• 101 年土木高考試題 •

## 問題剖析

### (1) 已知

- 材料性質： $E = 200 \text{ GPa}$ ， $G = 80 \text{ GPa}$
- 幾何性質： $A = 50 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ， $I = 235 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

### (2) 待求

- 內力圖： $N \text{ dia.}$ ， $V \text{ dia.}$ ， $M \text{ dia.}$
- 變形： $\Delta_{B,h}$

### (3) 方法

- 單位力法

### (4) 思路

- (外力)  $\rightarrow$  (內力)  $\rightarrow$  (變位)

## 技師高考【題型班】

9/03(一) 18:30 土力開課

9/06(四) 18:30 材力開課

9/08(六) 18:00 測量開課

~ 歡迎免費試聽 ~

## 參考解答

### (1) (外力) $\rightarrow$ (內力)

- 依據力的平衡

$$\text{圖 a } [\sum M_A = 0]: \left(\frac{4}{5} R_C\right)(4) + \left(\frac{3}{5} R_C\right)(8) - 80(5) = 0$$

$$\Rightarrow R_C = 50 \text{ kN (↘)}$$

$$\text{圖 a } [\sum F_x = 0]: 80 - \frac{3}{5}(50) - A_x = 0$$

$$\Rightarrow A_x = 50 \text{ kN (←)}$$

$$\text{圖 a } [\sum F_y = 0]: \frac{4}{5}(50) - A_y = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 40 \text{ kN (↓)}$$

繪內力圖，如圖 b~d 所示。

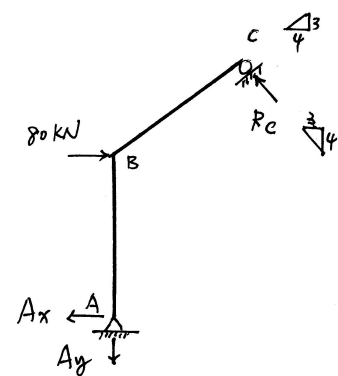


圖 a 外力作用

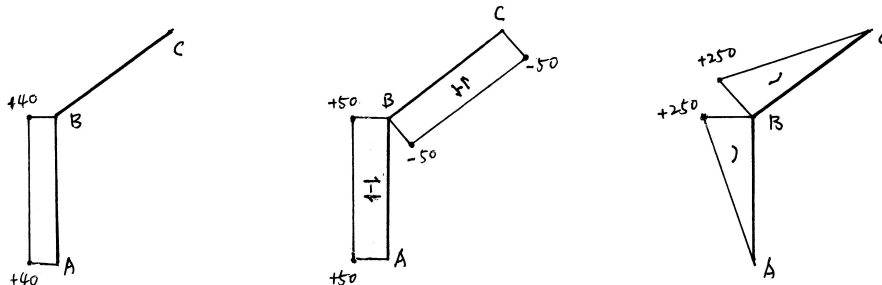


圖 b：軸力圖（單位 kN） 圖 c：剪力圖（單位 kN） 圖 d：彎矩圖（單位 kN-m）

• 列表計算

考慮真實外力作用下（圖 a），計算內力函數  $(N, V, M)$ 。

另外，考慮單位力作用下（圖 e），計算內力函數  $(n, v, m)$ 。

分段	原點	範圍	$N$	$n$	$V$	$v$	$M$	$m$
AB	A	0~5	40	1/2	50	5/8	50x	5x/8
BC	C	0~5	0	0	-50	-5/8	50x	5x/8

(2) (內力) → (變位)

• 依據單位力法

$$\begin{aligned}
 1. \Delta_{B,h} &= \int \frac{Nn}{EA} dx + \int \frac{kVv}{GA} dx + \int \frac{Mm}{EI} dx \\
 &= \frac{(40)(1/2)(5)}{(200 \times 10^6)(50 \times 10^{-3})} + 2 \times \frac{1.2(50)(5/8)(5)}{(80 \times 10^6)(50 \times 10^{-3})} + 2 \int_0^5 \frac{(50x)(5x/8)}{(200 \times 10^6)(235 \times 10^{-6})} dx \\
 &= 1 \times 10^{-5} + 9.375 \times 10^{-5} + 0.05541 \\
 &= 0.05551 \text{ m } (\rightarrow)
 \end{aligned}$$

若僅考慮彎矩作用，則

$$\Delta'_{B,h} = 0.05541 \text{ m } (\rightarrow)$$

誤差百分比為

$$\frac{\Delta_{B,h} - \Delta'_{B,h}}{\Delta_{B,h}} = \frac{0.05551 - 0.05541}{0.05551} = 0.18\%$$

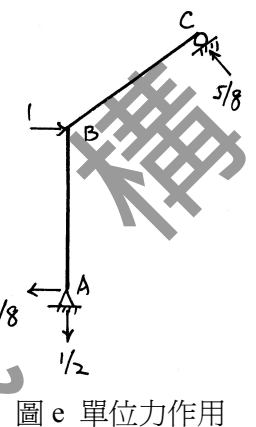


圖 e 單位力作用

**Ans :** (a)內力圖如圖 b~d 所示。  
 (b)考慮軸力、剪力、彎矩作用下  $\Delta_{B,h} = 0.05551 \text{ m } (\rightarrow)$   
 (c)僅考慮彎矩作用下  $\Delta'_{B,h} = 0.05541 \text{ m } (\rightarrow)$   
 誤差百分比為 0.18%

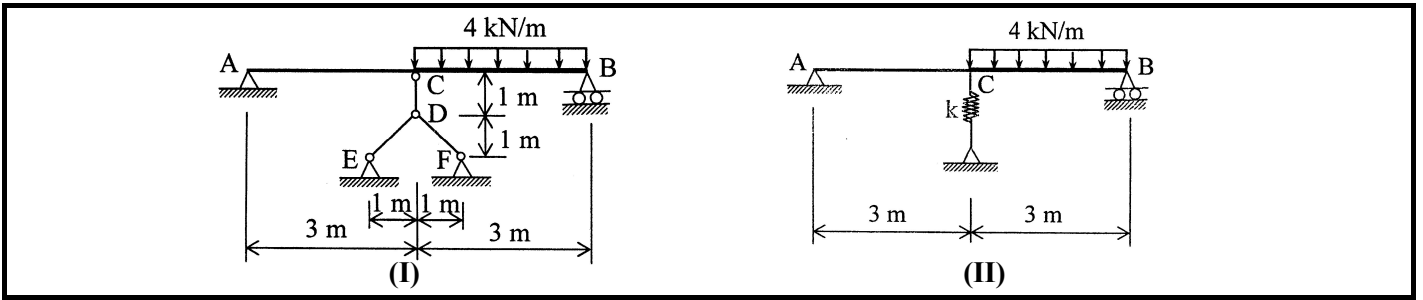
※本題請參考“實力結構學上冊講義—P4-46〔例 4-31〕”

二、分析圖(I)所示組合構架桿件 CD 之軸力  $(F_{CD})$ ，已知梁 AB 桿件之  $EI$  值為  $47,000 \text{ kN-m}^2$ ，所有二力桿件之  $EA$  值為  $80,000 \text{ kN}$ 。

(a)若分析時，將圖(I)結構簡化成如圖(II)所示，求該彈簧之勁度  $(k)$ 。(5 分)

(b)限以符合變形法 (Method of Consistent Deformation) 求解  $F_{CD}$ 。(20 分)

(註：若使用其他方法，本小題以零分計。)



【解題老師】林冠丞老師

• 101 年土木高考試題 •

**問題剖析**

- (1) 已知
  - 剛度： $EI = 47,000 \text{ kN-m}^2$ ， $EA = 80,000 \text{ kN}$
  - 外力： $w = 4 \text{ kN/m}$
- (2) 待求
  - 彈簧勁度： $k$
  - 內力： $F_{CD}$
- (3) 方法
  - 限相合變形法
- (4) 思路
  - (結構形式)  $\rightarrow$  (柔度)  $\rightarrow$  (勁度)
  - (外力)  $\rightarrow$  (內力)

提醒您~  
技師報名日期：8/7~8/16  
“一律採網路報名”

**參考解答**

- (1) 準備工作
  - 依據疊加原理  
(原結構) = (圖a結構) + (圖b結構)  
其中圖 b 為反對稱結構，彈簧並無受力。  
所以原結構的  $F_{CD}$  相等於圖 a 結構的彈簧力。

(2) (結構型式)  $\rightarrow$  (柔度)  $\rightarrow$  (勁度)

- 依據柔度的定義  
考慮一單位力作用下 (圖 c)  
 $f = \Delta_D + \delta_{CD} = \sqrt{2}\delta_{DE} + \delta_{CD}$   
 $= \sqrt{2} \cdot \frac{(1/\sqrt{2})(\sqrt{2})}{(80,000)} + \frac{(1)(1)}{(80,000)}$

$$= \frac{\sqrt{2} + 1}{80,000}$$

- 依據勁度的定義  
 $k = \frac{1}{f} = \frac{80,000}{\sqrt{2} + 1} = 33,137 \text{ kN/m}$

(3) (外力)  $\rightarrow$  (內力)

- 依據相合變形法  
考慮變位一致性 (圖 d)，可得  
(簡支梁 C 點向下變位) = (彈簧縮短量)

$$\frac{5wL^4}{384EI} - \frac{F_{CD}L^3}{48EI} = \frac{F_{CD}}{k}$$

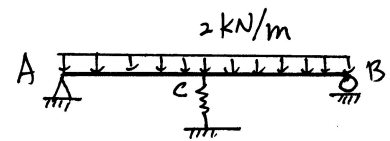


圖 a：對稱結構

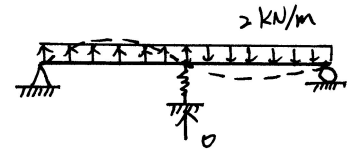


圖 b：反對稱結構

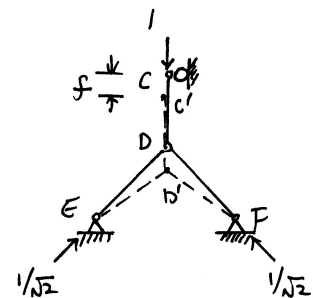


圖 c

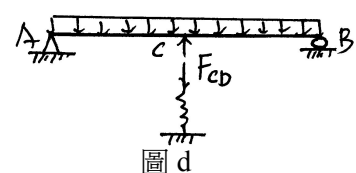


圖 d

或

$$\frac{5(2)(6)^4}{384(47,000)} - \frac{F_{CD}(6)^3}{48(47,000)} = \frac{F_{CD}}{33,137}$$

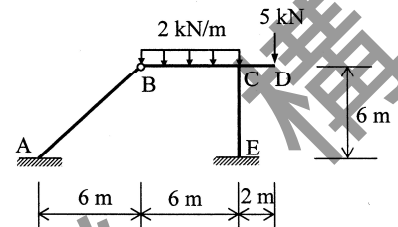
$$\Rightarrow F_{CD} = 5.70 \text{ kN (壓力)}$$

Ans : (a) 彈簧勁度  $k = 33,137 \text{ kN/m}$   
 (b) CD 桿軸力  $F_{CD} = 5.70 \text{ kN (壓力)}$

※本題請參考“實力結構學下冊講義—P7-66 [G5.1-1]”

三、如右圖所示結構，其中 B 點為鉸接點，各桿件之  $EI$  皆相同，可以忽略各桿件之軸力與剪力引起之變形。

- (a) 限以傾角變位法 (Slope-Deflection Method) 求各桿件端點之彎矩。(20 分) (註：若使用其他方法，本小題以零分計。)
- (b) 求 D 點之垂直位移量。(5 分)



【解題老師】林冠丞老師

• 101 年土木高考試題 •

**問題剖析**

(1) 已知

- 剛度：  $EI$
- 外力：  $P = 5 \text{ kN}$ ，  $w = 2 \text{ kN/m}$

(2) 待求

- 內力：  $M_{ij}$
- 變位：  $\Delta_{DV}$

(3) 方法

- 限傾角變位法

(4) 思路

- (變位)  $\rightarrow$  (變形)  $\rightarrow$  (內力)  $\rightarrow$  (外力)
- (外力)  $\rightarrow$  (變位)

**參考解答**

(1) 準備工作

- 判別自由度及待求桿端彎矩  
 考慮 B 點為鉸接，可以視為雙自由度 (圖 a)，其對應的待求桿端彎矩如圖 b 所示。

圖 a：標示自由度

- 計算相對  $2EK$  值

$$\begin{aligned} 2EK_{AB} : 2EK_{BC} : 2EK_{CE} \\ = \frac{2EI}{6\sqrt{2}} : \frac{2EI}{6} : \frac{2EI}{6} \end{aligned}$$

$$= K : \sqrt{2}K : \sqrt{2}K \quad (\text{令 } K = EI/3\sqrt{2})$$

- 計算固端彎矩

$$M_{CB}^F = \frac{(2)(6)^2}{8} = 9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

(2) (變位)  $\rightarrow$  (變形)

- 依據變位的諧合  
 利用投影解法 (圖 c)，可得

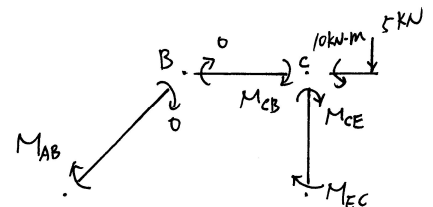


圖 b：標示待求桿端彎矩

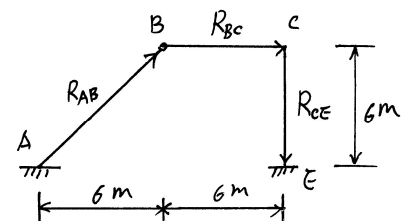


圖 c：投影解法

$$[\Sigma \Delta_y = 0]: 6R_{AB} + 6R_{BC} = 0$$

$$[\Sigma \Delta_x = 0]: 6R_{AB} - 6R_{CE} = 0$$

$$\Rightarrow R_{AB} : R_{BC} : R_{CE} = R : -R : R$$

∴ 選擇  $\theta_b$  及  $R$  作為基本未知數

(3) (變形) → (內力)

- 依據桿端彎矩方程式

$$M_{AB} = K(-1.5R)$$

$$M_{CB} = \sqrt{2}K(1.5\theta_c + 1.5R) + 9$$

$$M_{CE} = \sqrt{2}K(2\theta_c - 3R)$$

$$M_{EC} = \sqrt{2}K(\theta_c - 3R)$$

(4) (內力) → (外力)

- 依據力的平衡

圖 d  $[\Sigma M_C = 0]: M_{CB} + M_{CE} = 10$

$$3.5\sqrt{2}K\theta_c - 1.5\sqrt{2}KR = 1 \quad \dots(a)$$

圖 e  $[\Sigma M_o = 0]: M_{AB} + M_{EC} - \frac{M_{AB}}{6\sqrt{2}}(12\sqrt{2}) - \frac{M_{CE} + M_{EC}}{6}(12)$

$$-12(3) + 5(2) = 0$$

$$5\sqrt{2}K\theta_c - (1.5 + 9\sqrt{2})KR = -26 \quad \dots(b)$$

聯立(a)及(b)式，可得

$$K\theta_c = 1.2518 \Rightarrow \theta_c = \frac{1.2518}{K} = \frac{5.311}{EI}$$

$$KR = 2.4495$$

將  $K\theta_c$  及  $KR$  值代入步驟(3)，可得各桿端彎矩 (圖 f)。

(5) (外力) → (變位)

- 依據基本變位公式

$$\Delta_{DV} = \frac{PL_{CD}^3}{3EI} + \theta_c L_{CD} = \frac{(5)(2)^3}{3EI} + \left(\frac{5.311}{EI}\right)(2)$$

$$= \frac{24.0 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \quad (\downarrow)$$

Ans : (a) 各桿端彎矩如圖 f 所示

(b) D 點垂直變位  $\Delta_{DV} = \frac{24.0 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \quad (\downarrow)$

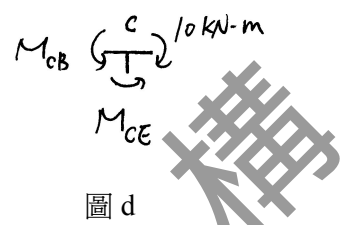


圖 d

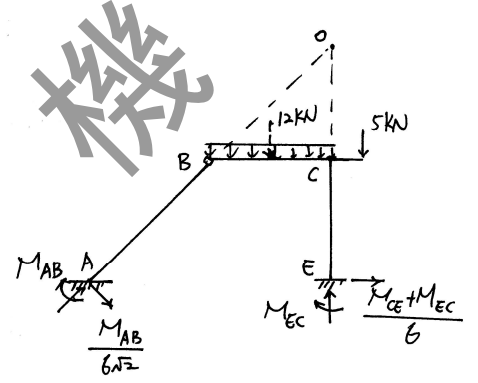


圖 e

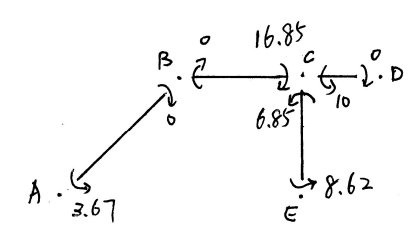


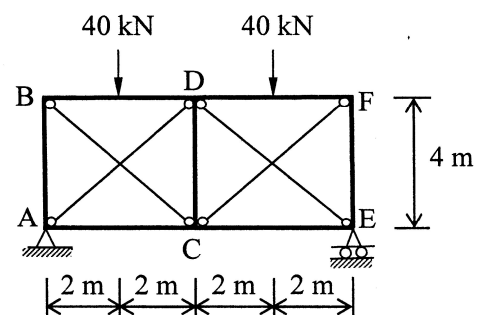
圖 f: 桿端彎矩 (單位 kN-m)

※本題請參考“實力結構學下冊講義—P8-47 [H3.3-2]”

四、如右圖所示二個封閉剛架，每個封閉剛架內配置二根交叉之二力桿件，已知所有剛架桿件之  $EI$  值皆為  $47,000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ ，所有二力桿件之  $EA$  值皆為  $100,000 \text{ kN}$ ，可以忽略剛架桿件之軸力與剪力所引起之變形。

(a) 考慮結構之對稱性可以簡化分析，請問簡化後之最少位移自由度為何？(5分)

(b) 限以直接勁度法 (Direct Stiffness Method) 求二力桿件 AD 之軸力及桿件 BD 端點之彎矩。(20分) (註：若使用其他方法，本小題以零分計。)



**問題剖析**

(1) 已知

- 剛度：  $EI = 47,000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$  ,  $EA = 100,000 \text{ kN}$
- 外力：  $P = 40 \text{ kN}$

(2) 待求

- 自由度
- 內力：  $N_{AD}$  ,  $M_{BD}$  ,  $M_{DB}$

(3) 方法

- 限直接勁度法

(4) 思路

- (結構型式)  $\rightarrow$  (勁度矩陣)
- (外力矩陣)  $\rightarrow$  (變位矩陣)  $\rightarrow$  (內力矩陣)

**參考解答**

(1) 準備工作

- 判別自由度及座標設定 (圖 a 及圖 b)  
 本題為水平無側移的對稱結構 ( $\theta_A = -\theta_E$  ,  $\theta_B = -\theta_F$  ,  $\theta_C = \theta_D = 0$ )  
 , 取半分析後有三個自由度。

- 依據疊加原理  
 (原結構) = (圖 c 結構) + (圖 d 結構)

- 由圖 c 可得固端彎矩

$$[Q^F] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -PL/8 \\ PL/8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ 20 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 由圖 d 可得等值節點荷重

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ 20 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

(2) (結構型式)  $\rightarrow$  (勁度矩陣)

- 依據勁度係數的定義

圖 e：令  $r_1 = 1, r_2 = r_3 = 0$  , 可得

$$K_{11} = \frac{4EI}{4} + \frac{4EI}{4} = 2EI$$

$$K_{21} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI$$

$$K_{31} = -\frac{6EI}{4^2} = -0.375EI$$

圖 f：令  $r_2 = 1, r_1 = r_3 = 0$  , 可得

$$K_{12} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI$$

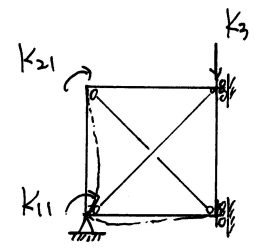
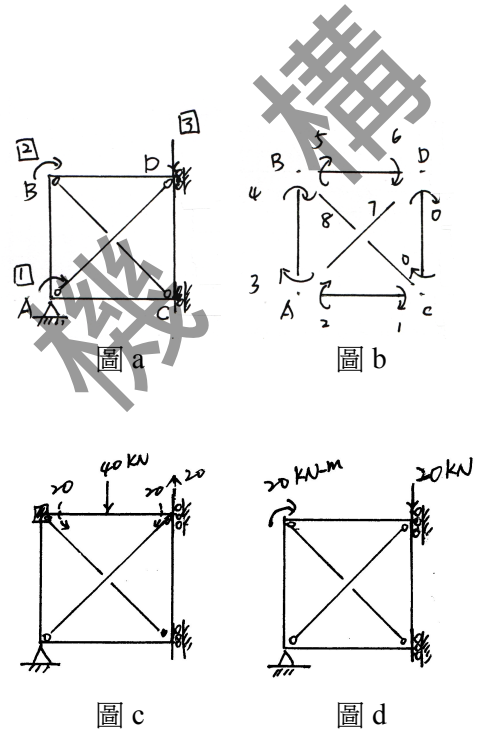


圖 e：  $r_1 = 1, r_2 = r_3 = 0$

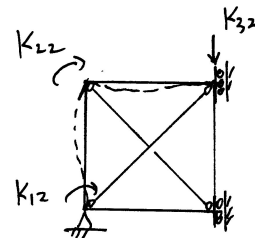


圖 f：  $r_2 = 1, r_1 = r_3 = 0$

$$K_{22} = \frac{4EI}{4} + \frac{4EI}{4} = 2EI$$

$$K_{32} = -\frac{6EI}{4^2} = -0.375EI$$

圖 g：令  $r_3=1, r_1=r_2=0$ ，可得

$$K_{13} = K_{23} = -\frac{6EI}{4^2} = -0.375EI$$

$$K_{33} = \left( \frac{12EI}{4^3} + \frac{EA}{8\sqrt{2}} \right) \times 2 = 0.751EI$$

$$\therefore [K] = EI \begin{bmatrix} 2 & 0.5 & -0.375 \\ 0.5 & 2 & -0.375 \\ -0.375 & -0.375 & 0.751 \end{bmatrix}$$

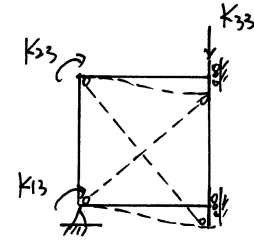


圖 g：  $r_3=1, r_1=r_2=0$

(3) (外力矩陣) → (變位矩陣)

- 依據勁度矩陣連結外力－變位關係

$$[r] = [K]^{-1} [R]$$

或

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 2 & 0.5 & -0.375 \\ 0.5 & 2 & -0.375 \\ -0.375 & -0.375 & 0.751 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.737/EI \\ 16.070/EI \\ 36.022/EI \end{bmatrix}$$

(4) (變位矩陣) → (內力矩陣)

- 依據內力轉換關係

$$[Q] = [T][r] + [Q^F]$$

或

$$\begin{bmatrix} Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & EI & -0.375EI \\ 0 & 0.5EI & -0.375EI \\ 0 & 0 & 0.125EA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.737/EI \\ 16.070/EI \\ 36.022/EI \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -0.375 \\ 0 & 0.5 & -0.375 \\ 0 & 0 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.737 \\ 16.070 \\ 36.022 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -17.44 \text{ kN-m} \\ 14.53 \text{ kN-m} \\ 9.58 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

十年後您想擁有什麼？

現在您又該做什麼？

一切由您自己做決定!!

萬物皆漲的時代下~

如何“飆漲”您的“土木人生”

實力專案幫您實踐夢想，

敬請把握“技師考試最後舊制”

活動期限至 101/08/31 止

Ans：(a)簡化後有三個自由度

(b)  $N_{AD} = 9.58 \text{ kN}$  (壓力)

$M_{BD} = 17.44 \text{ kN-m}$  (↺)

$M_{DB} = 14.53 \text{ kN-m}$  (↻)

※本題請參考“實力結構矩陣講義－P4-57〔例 4.25〕”

實力網站上提供高普考部份科目解答

<http://www.shi-li.com.tw/>

實力技師“題型班”含最新試題完整詳